物理学情報処理演習

１３. 便利な道具1

可視化 -Grapher-

参考文献
Calculus with Mathematica
Finch/Lehmann Addison-Wesley
物理学のための Mathematica
ロバート・ジンマーマン他著 ピアソン・エデュケーション

大久保晋

E-mail: buturi-johoshori@tiger.kobe-u.ac.jp
http://extreme.phys.sci.kobe-u.ac.jp/staffs/okubo/lectures/Programming/index.html

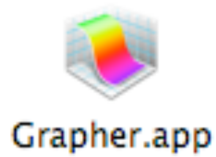
Grapherを使ってみよう

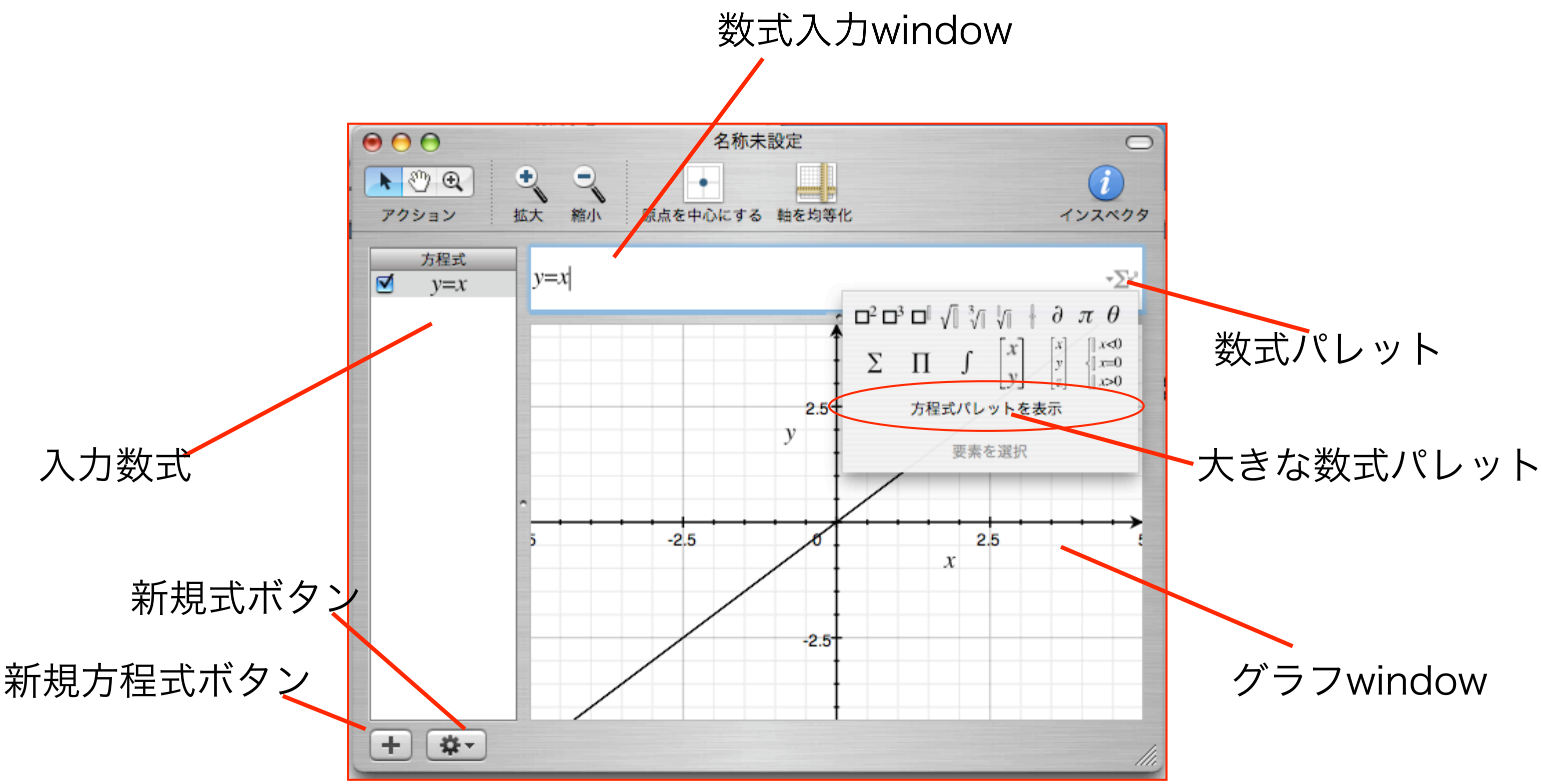
Mac OSX Tigerから標準でついてくるGrapherを使ってみよう

Grapherは、「アプリケーション」の下の

「ユーティリティ」のフォルダーの中にある。

開くと以下のようなwindowが開く





演習１３－１：グラフのプロット

数式入力windowで

$$y=x+2$$

を入力し、リターンして右図のような図がかけることを確認しよう。

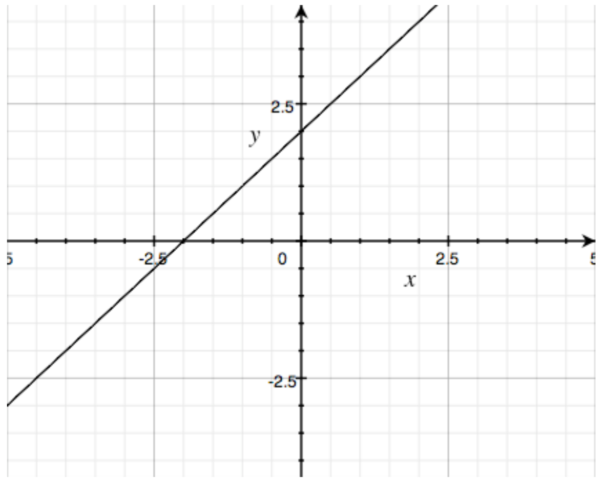
続けて、「＋」マークの新規方程式ボタンを押して

$$y=x^2+x-2$$

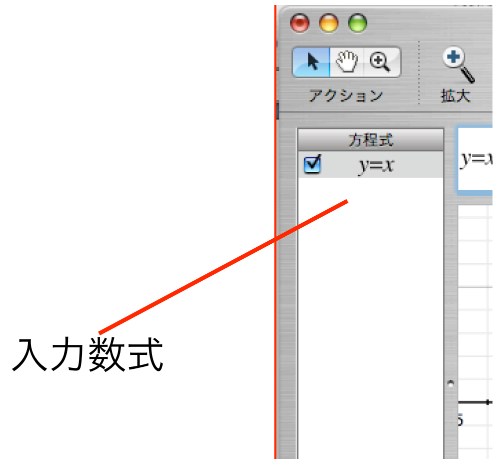
を入力してみよう。

$$x^2$$

の入力には、数式パレット／大きな数式パレットを用いるか 「x^2」 と入力する。



１次方程式と２次方程式の両方が表示され、入力数式windowで選択されている式のグラフが濃く描かれ、未選択の数式のグラフは薄く表示されている。

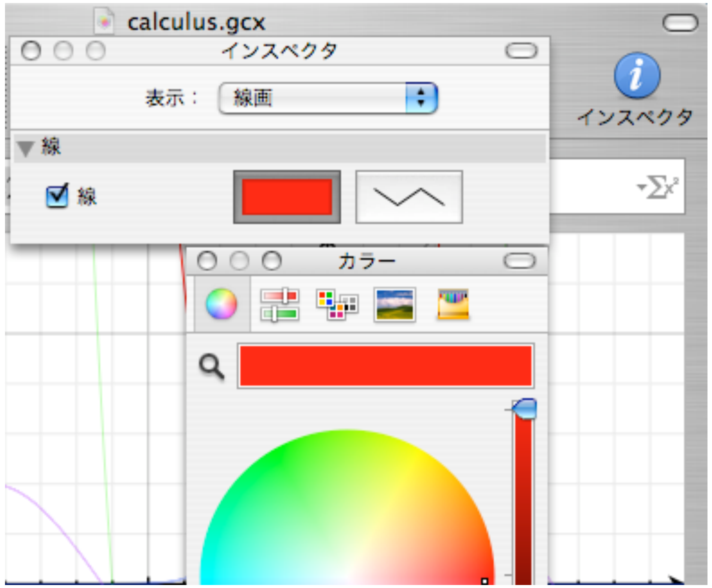


グラフを描く数式の選択は、入力数式windowの左脇のチェックボタンのON/OFFで選択可能

演習１３−１：グラフのプロット

グラフのプロットの色を変えるには、入力数式windowで数式を選択しておき、

- 右上の「インスペクタ」をクリック
- 表示：「線画」となっているときにカラーボックスをクリック
- カラーパレットから色を選択
  - A 一番上の円形選択：右スライドバーを上げる
  - B 一番上の一番右選択：クレオンパレット
  - のいずれかが便利



演習１３−２：２つのグラフの交点を求める

前出の数式

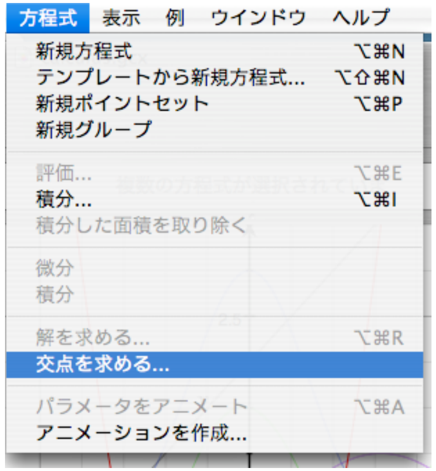
$$y=x^2+x-2$$

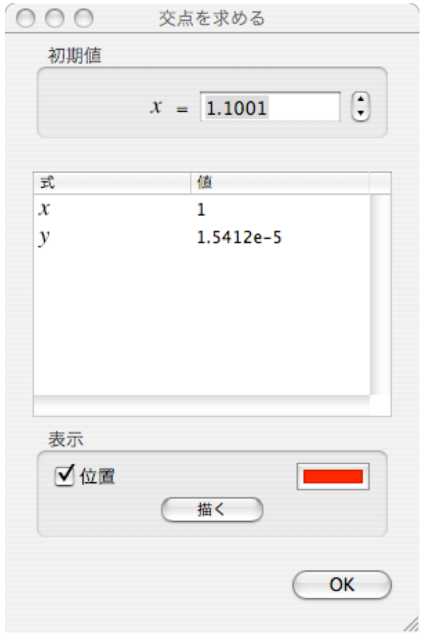
のx軸との交点を求めてみよう。x軸を表す数式

$$y=0$$

を入力する。入力数式windowで２つの数式を選択し（２つ目の数式を選択するにはshiftを押しながらクリックする）、

メニューバーの「方程式」の中の「交点を求める」を指定する。すると右図のwindowが現れる





初期値を与えるのに、グラフ上の適当な点をクリックすると右図中段の x, y に交点の座標が現れる。２次方程式の右側の解を求めるには、極値（２次曲線の底）の右側を初期値とし、左側の解を求めるには左側を初期値にとる。

授業の９でC言語で方程式の解を求めたのと同様に初期値が適当でないと解は小数点の部分で違ってくる。$x^2+x-2=0$の解は$x=-2, 1$。

演習１３−２：２つのグラフの交点を求める

先ほどは２次方程式の解を求めたが、今度は１次式と２次式

$y=x+2$　　　$y=x^2+x-2$

の交点を求めてみよう。

交点のx座標は $x^2-4=0$ の解が $x=-2, 2$ なので、-2, 2

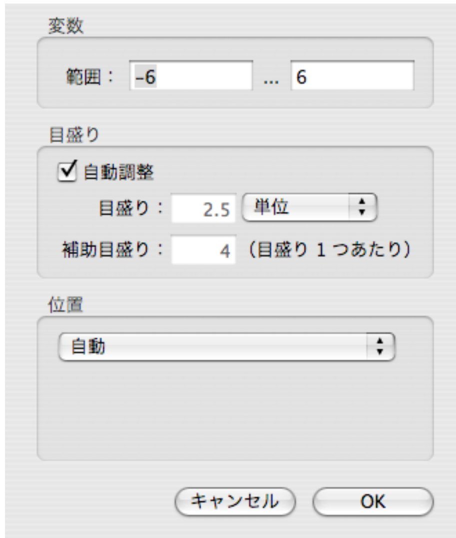
交点が作図範囲外にある場合は、次のA, Bいずれかで対処しよう

A. 全体の拡大縮小

拡大縮小ツールで縮小する

B. グラフ描画範囲の指定

メニューバーの「フォーマット」の
「軸とグリッド」をクリック
「デカルト座標系」の「横座標の軸」
を　選択し、左下の「編集」をクリック
右図のwindowが出てくるので「範囲」を
指定してやる。例えば -6から 6まで
同様に縦軸も行う



演習１３−３：様々な関数のグラフを描いてみよう

いろいろなグラフを描いてみよう

４次関数

$$y=0.25x^4+0.25x^3-1.75x^2-0.25x+1.5$$

三角関数

$$y=\sin x$$

ガウス分布

$$y=3e^{-x^2}$$

その他、適当な式を入れてみよう

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

とか？

演習１３−４：逆関数

逆関数の表記は次のようになる。

三角関数

$$y=\tan x$$

の逆関数は

$$y=\arctan x$$

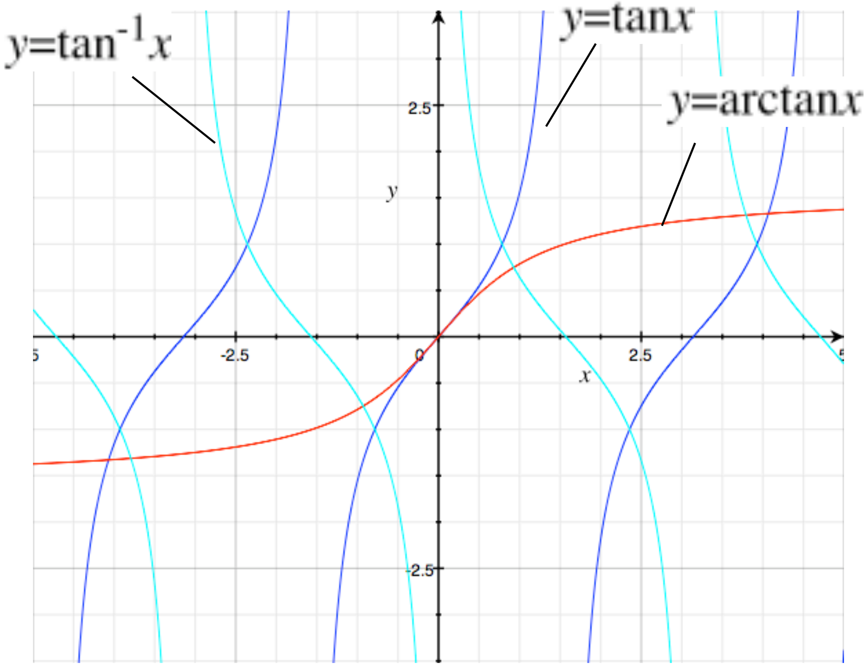
と表記する。

$$y=\tan^{-1} x$$

の表記は

$$y=\frac{1}{\tan x}$$

を意味する。



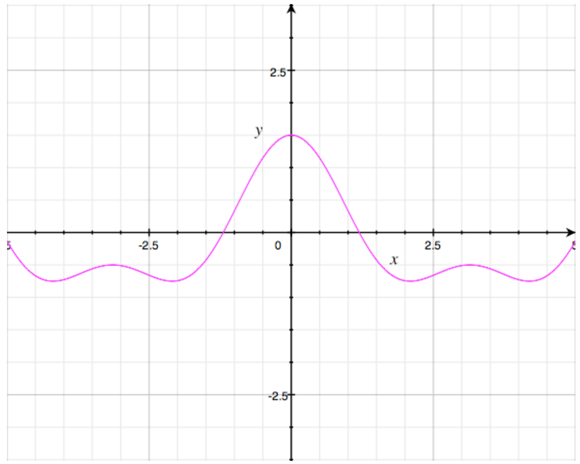
演習１３−４：逆関数

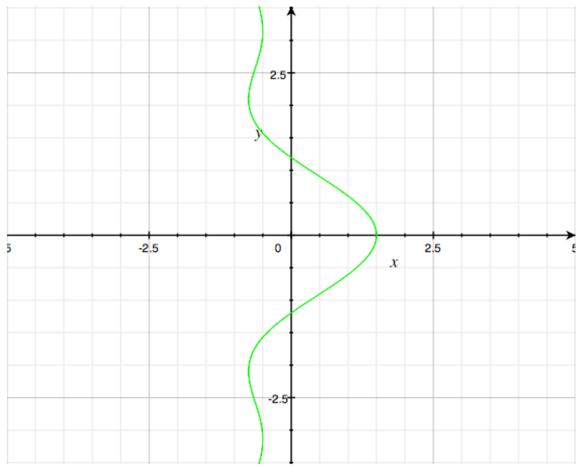
よりややこしい数式

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

の逆関数は次のように表記すればグラフを描く

$$x = \cos y + \frac{1}{2}\cos 2y$$





演習１３−５：２変数表示式

半径２の円の方程式

$$4^2=x^2+y^2$$

のままの表記でもグラフを描く、楕円を描いてみよう

$$2^2=x^2+xy+y^2$$

この方程式の右辺第２項の部分を変数nを入れて可変にすることを考えよう

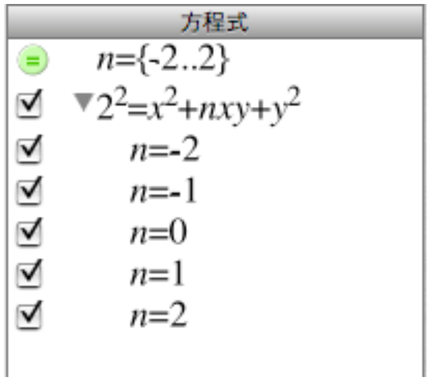
$$2^2=x^2+nxy+y^2$$

まず、 $n=\{-2...2\}$

と入力し、 $2^2=x^2+nxy+y^2$

と入力する。n=-2, -1, 0, 1, 2 と変えたグラフを描く

入力数式windowの式の右の三角をクリックするとそれぞれのnの値の代入が行われていることがわかる。



nの値の変化で楕円から円を経て楕円に変わることがわかる。

nのそれぞれの値のグラフを個別表示する必要がなければ、次の表記でも可

$$2^2=x^2+nxy+y^2,\ n=\{-4...4\}\cdot 0.25$$

２変数表記なら次式のような式のグラフも描ける

$$y^3=1+xy^2$$

演習１３−５：Taylor Expansion -cos-

関数は一般的にn次の微分とベキ関数の級数で近似でき、そのベキ級数展開は、Taylor展開として知られている。

関数 $f(x)$ をx=a点周りで近似するTaylor展開の定義は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\left(x-a\right)^n$$

で、ここで $f^{(n)}(a)$ は、$f(x)$ のn階微分 $d^n f(x) \big/ dx^n$ でx=aとしたものである。

周期関数であるcos(x)をa=0点まわりで近似することを考える。

$d^n f(a) \big/ dx^n$ が問題だが、これは簡単に解決する。

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos x = \frac{d}{dx}\left(-\cos x\right)$$

より

$$\frac{d^n f(0)}{dx^n} = \left.\frac{d^n \cos x}{dx^n}\right|_{x=0} = \begin{cases} (-1)^i \sin 0 = 0 \cdots n = 2i+1 \\ (-1)^i \cos x = (-1)^i \cdots n = 2i \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots$

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^i \sin x \cdots n = 2i+1 \\ (-1)^i \cos x \cdots n = 2i \end{cases}$$

演習１３−５：Taylor Expansion -cos-

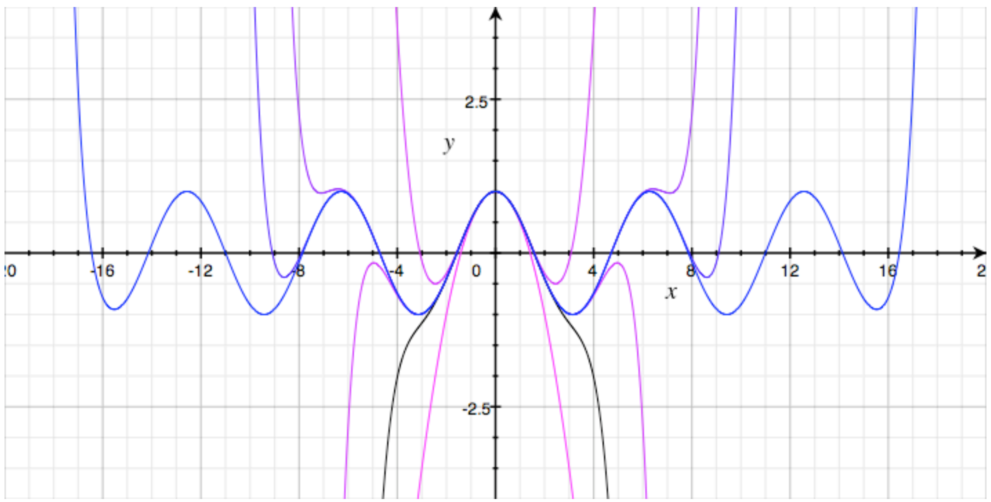
従って、nの偶数・奇数で割り振り、奇数の場合はゼロなので、偶数のみを考えればよい

式は、次のように簡単である。 $$y=\sum_{n=0}^{n_{\max}}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)$$

web サーバーから [joho13_TaylorCos.gcx](http://extreme.phys.sci.kobe-u.ac.jp/extreme/staffs/okubo/lectures/Programming/joho13_TaylorCos.gcx) (http://extreme.phys.sci.kobe-u.ac.jp/extreme/staffs/okubo/lectures/Programming/joho13_TaylorCos.gcx)をダウンロードして確認してみてください。

1, 2, 5, 8, 10, 20次と近似の次数を上げていくと、Cos xの近似が±π/2, ±π, ±4πと範囲が広がっていることが確認できる。

joho13_TaylorCos.gcxのもう一つの式は、手でいれた６次までの式である。



演習１３－６：力学　ー自由落下

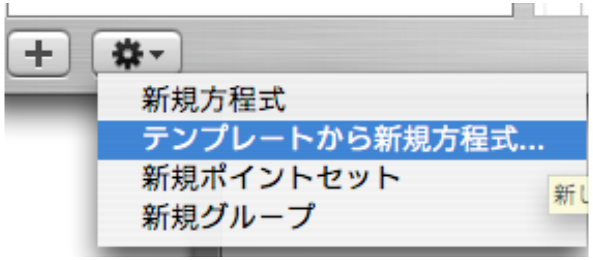
質量mの質点を地面とのなす角度θで初速度vで投げることを考えよう。

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-mg \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(0)=v\cos\theta \\ v_y(0)=v\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$$

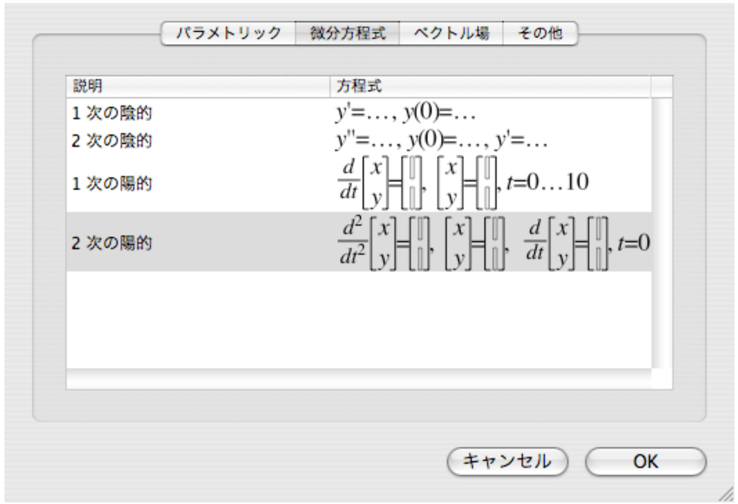
を上記の初期条件で解けばよい。

簡単な常微分方程式ならそのままグラフにできる。

左下の歯車の絵を押して「テンプレートから新規方程式」を選ぶ。



「微分方程式」から「２次の陽的」を選ぶ。



次を入力する。

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-9.8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}fx\\fy\end{bmatrix}, t=0\ldots10$$

その他の値として次も入力する。

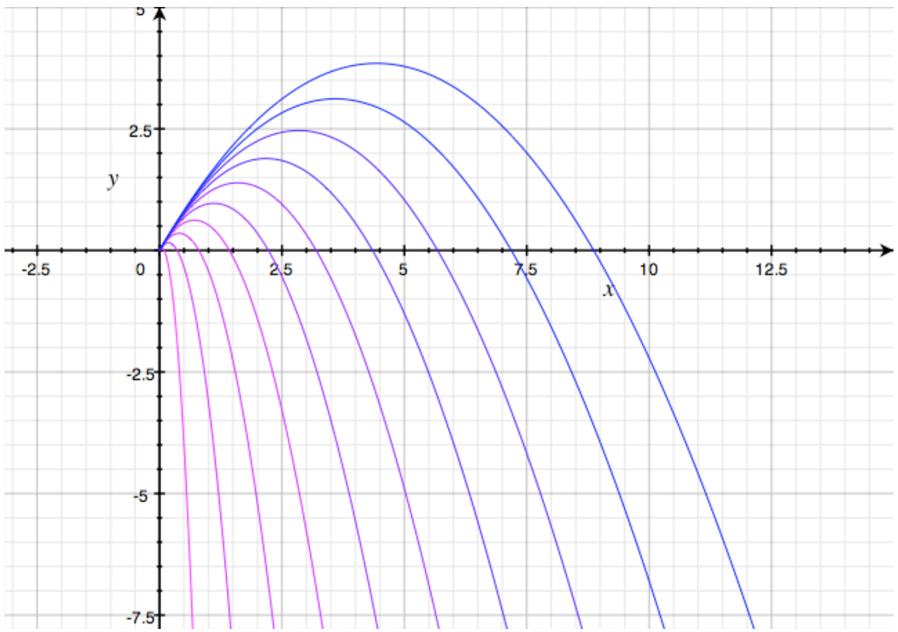
$$v=\{0...10\}$$
$$th=60$$
$$fx=v\cdot\cos\left(2\cdot3.14\cdot\frac{th}{360}\right)$$
$$fy=v\sin\left(2\cdot3.14\cdot\frac{th}{360}\right)$$

演習１３−６：力学　ー自由落下

結果はどうだっただろうか？

この場合、初速度vを0から10までの間、1づつ変化させてグラフにしている。

「初速度vが大きいほど遠くに飛ぶ」というあたりまえのことがきちんと出ている。



うまく動かないときは
joho13_grav.gcx (http:// extreme.phys.sci.kobe-u.ac.jp/extreme/staffs/okubo/lectures/Programming/joho13_grav.gcx)
をダウンロードすること。

演習１３－７：力学　ー空気抵抗のある落下

次に空気抵抗のある場合の質量mの質点が落下することを考えよう。

初期条件として高さ20mから初速度ゼロで落とすとする。なお、空気抵抗の係数はbとする。空気抵抗の効果は速度vに係数bで比例すると考える。s

高さ方向をxとしてやると運動方程式は次のようになる。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - b\frac{dx}{dt}$$

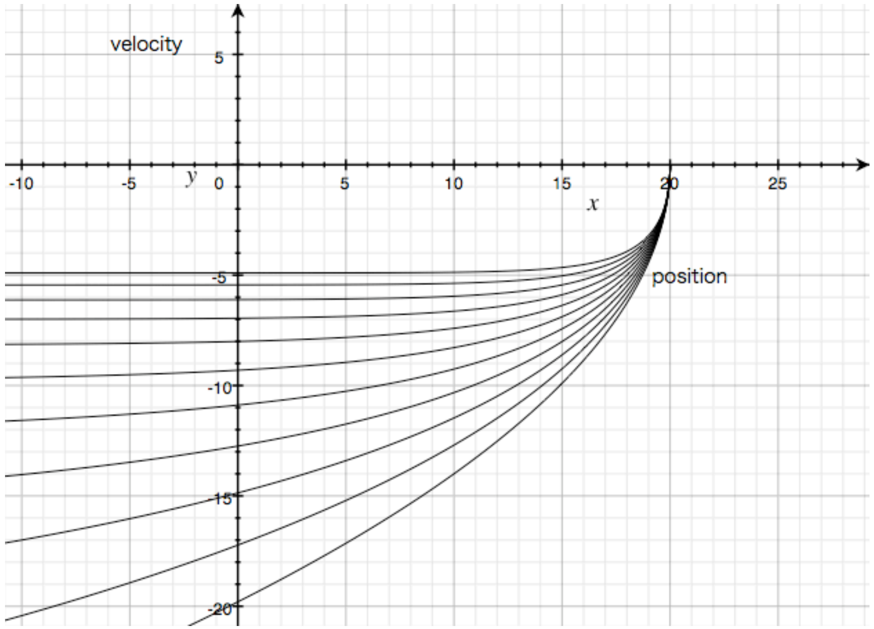
この場合、常微分方程式を特には、C言語の常微分方程式を解いたときと同様に１階の微分方程式に書き換えてやる必要がある。（Grapher内部では、Runge-Kutta法などを用いて解いているので同じことをしなければならない）速度v をy という変数を使うと方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ m\dfrac{dy}{dt} = -mg - by \end{cases}$$

演習１３−７：力学　ー空気抵抗のある落下

結局、以下の入力を行う

$$m=1$$
$$g=9.8$$
$$b=0.2\cdot\{0...10\}$$
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\-\frac{g}{m}-\frac{b}{m}y\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix},\ t=0\ldots10$$



空気抵抗の効果bは 0から 2.0まで 0.2刻みで変化させてグラフを描いた。

このグラフの場合、xが高さを示しており、yは質点の速度を表している。空気抵抗が小さい場合、地面（高さ20mより落としたのでx=0が地面）での速度が大きいことがわかる。一方、空気抵抗が大きい場合、20mから落下後すぐに一定速度（終端速度）に到達することがわかる。