10 物質中の電磁場後半と電磁場の性質　解答

１. 物質中のマクスウェル方程式について次の問に答えよ。

(a) 電束、磁場ベクトルは分極ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$、磁化ベクトル $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$ を使ってどのように表されるか？

(b) 物質中のマクスウェル方程式はどのように表せるか、４つの方程式を書け。

(c) 電磁場の時間変化が遅いときは分極ベクトル、磁化ベクトルは電場ベクトル、磁場ベクトルを用いてどのように表されるか？

解答

(a) $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \mathbf{M}(\mathbf{r},t)]$　教科書 (10.6)(10.7)

(b) $\nabla\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t), \quad \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial\mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mathbf{i}(\mathbf{r},t), \quad \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$
教科書 (10.8)〜(10.11)

(c) $\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \chi_e\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \chi_m\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$　教科書 (10.12)(10.13)

２. 誘電率 ε、透磁率 μ、電気伝導率 σ が一様な物質中を平面波として z 軸方向に進む角振動数 ω の電磁波がある。

(a) 物質中のマクスウェル方程式のうち、

$$\nabla\times\mathbf{B}(z,t) - \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}(z,t)}{\partial t} = \mu\mathbf{i}(z,t)$$

の x 成分はどのようになるか（電流密度が $\mathbf{i}(z,t) = \sigma\mathbf{E}(z,t)$ で与えられ、磁場が y によらないことに注意）

(b) 物質中のマクスウェル方程式のうち、

$$\nabla\times\mathbf{E}(z,t) + \frac{\partial\mathbf{B}(z,t)}{\partial t} = 0$$

の y 成分はどのようになるか。

(c) (a) の結果を t で、(b) の結果を z でそれぞれ偏微分し、その２式から $\mathbf{B}_y(z,t)$ を消去すれば $\mathbf{E}_x(z,t)$ が満たすべき方程式が得られる。それはどのようになるか。

(d) 電場の x 成分が $E_x(z,t) = E_0\exp[i(\omega t - \tilde{k}z)]$ であるとき、上の結果にこれを代入し、ω と $\tilde{k}$ の間に成り立つ関係を求めよ。

(e) 複素数 $\tilde{k}$ の実数部 k と虚数部 k' はどのように表されるか。（関係式だけでなく解を求める。k の解に k'、$\tilde{k}$ を含めないこと。逆もしかり）

(f) 磁場の y 成分 $B_y(z,t)$ を求めよ。（$\tilde{k}$ はそのまま残して良い、積分定数は無視してよい。）

(g) 電場のエネルギー密度 $u_e = \frac{\varepsilon|E_x(z,t)|^2}{2}$ と磁場のエネルギー密度 $u_m = \frac{|B_y(z,t)|^2}{2\mu}$ の比はいくらか。

(h) 銅とガラスの中をそれぞれ進む振動数 $50s^{-1}$ の電磁波について、電場と磁場のエネルギー密度の比を計算せよ。ただし、銅の誘電率 ϵ、透磁率 μ、電気伝導率 σ は、$\varepsilon \cong \varepsilon_0$、$\mu \cong \mu_0$、$\sigma = 5.8\times10^7\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ であり、ガラスの場合は、$\varepsilon \cong 5\varepsilon_0$、$\mu \cong \mu_0$、$\omega = 1.0\times10^{-15}\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ である。

(i) 導体の表面に平面波の電磁波が入射する際、表皮深さと呼ばれる特徴的な深さ l を答えよ。

(j) 表皮深さ（教科書では l）を周波数 ν を $10GHz$ として、銅 (Cu) の場合 $\sigma_{Cu} = 59.6\times10^6[m^{-1}\Omega^{-1}]$、ガラスの場合 $\sigma_{glass} = 1.0\times10^{-11}[m^{-1}\Omega^{-1}]$ で求めよ。

解答

(a) $\nabla\times\mathbf{B}(z,t) - \varepsilon\mu\frac{\partial\mathbf{E}(z,t)}{\partial t} = \mu\mathbf{i}(z,t) = \mu\rho\mathbf{E}(z,t)$　（$\mathbf{i}(z,t) = \sigma\mathbf{E}(z,t)$ を使った）の x 成分は

$$\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial y} - \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} - \varepsilon\mu\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = \mu\sigma E_x(z,t)$$

となるが、B は y に関して依存性がない（$\partial B_z(z,t)/\partial y = 0$）ので

$$-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial y} - \varepsilon\mu\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = \mu\sigma E_x(z,t) \tag{1}$$

(b) $\nabla \times \mathbf{E}(z,t) + \frac{\partial \mathbf{B}(z,t)}{\partial t} = 0$ の y 成分は

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial x} + \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} = 0$$

となるが、平面波として z 方向に進行する波なので、x、y に関して依存性はない、よって

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

(c) 式 (1) を t で偏微分すると

$$-\frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial t \partial z} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \tag{3}$$

式 (2) を z で偏微分すると

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_y(z,t)}{\partial z \partial t} = 0 \tag{4}$$

式 (3)、式 (4) の辺々をたし合わせて、$\partial z \partial t$ は入れ替えできるので

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \tag{5}$$

これが $E_x(z,t)$ の満たすべき方程式。

(d) $E_x(z,t) = E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{k}z)]$、これを t、z の１階、２階の偏微分をとると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} &= i\omega E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{k}z)] = i\omega E_x(z,t) \\
\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{k}z)] = -\omega^2 E_x(z,t) \\
\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} &= -i\tilde{k} E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{k}z)] = -i\tilde{k} E_x(z,t) \\
\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} &= -\tilde{k}^2 E_0 \exp[i(\omega t - \tilde{k}z)] = -\tilde{k}^2 E_x(z,t)
\end{aligned}$$

以上を式 (5) に代入して、

$$\begin{aligned}
-\tilde{k}^2 E_x(z,t) + \varepsilon\mu\omega^2 E_x(z,t) &= i\mu\sigma\omega E_x(z,t) \\
\therefore \tilde{k}^2 &= \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega \qquad (6)
\end{aligned}$$

(e) 問より $\tilde{k} = k + ik'$ と書ける。$\tilde{k}^2 = k^2 - k'^2 + i2kk'$ であるので実部は $k^2 - k'^2$。虚部は $2kk'$ と表される。式 (6) と比較して、

$$k^2 - k'^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \tag{7}$$

$$2kk' = -\mu\sigma\omega \tag{8}$$

となる。式 (8) より k' は $k' = -\frac{\mu\sigma\omega}{2k}$。これを式 (7) に代入して整理すると k の４次式を得る

$$4k^2 - 4\varepsilon\mu\omega^2 k^2 - \mu^2\sigma^2\omega^2 = 0 \tag{9}$$

k は実数なので必ず $k^2 \geq 0$ である。従って 式 (9) は２次方程式の解より

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{\varepsilon\mu\omega^2 \pm \sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4 + \mu^2\sigma^2\omega^2}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\varepsilon\mu\omega^2 \pm \sqrt{\varepsilon^2\mu^2\omega^4\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)}\right\} \\
&= \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right\}
\end{aligned}$$

$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} \geq 1$ であることと $k^2 \geq 0$（実数）より ”$-$” は排除されるので $k^2 = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right\}$、従って

$$k = \pm\omega\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}\right\}\right]^{1/2} = \pm\omega\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} + 1\right\}\right]^{1/2} \tag{10}$$

式 (10) を式 (8) に代入して k' は

$$\begin{aligned}
k' &= -\frac{\mu\sigma\omega}{2k} = \mp\frac{\mu\sigma}{2}\frac{1}{\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right\}\right]^{1/2}} = \mp\frac{\mu\sigma}{2}\frac{\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right\}\right]^{1/2}}{\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right\}\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right\}\right]^{1/2}} \\
&= \mp\frac{\mu\sigma}{2}\frac{\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right\}\right]^{1/2}}{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\left\{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right\}-1\right]^{1/2}} = \mp\frac{\mu\sigma}{2}\frac{\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right\}\right]^{1/2}}{\frac{\varepsilon\mu}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}} \\
&= \mp\omega\left[\frac{\varepsilon\mu}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right\}\right]^{1/2} \qquad (11)
\end{aligned}$$

（注意）最初の行の変換に分子分母に $\left\{-\sqrt{}+1\right\}^{1/2}$ をかけても良さそうに見えるが、$\left\{-\sqrt{}+1\right\}^{1/2}$ が虚数なので、k' が実数に反する（$\tilde{k}=k+ik'$）。もしこれで行くのなら k' を $-ik'$ としなければならない。

(f) (b) の解の式 (2) に $E_x(z,t)=E_0\exp\left[i(\omega t-\tilde{k}z)\right]$ を代入すると

$$\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -i\tilde{k}E_x(z,t) = i\tilde{k}E_0\exp\left[i(\omega t-\tilde{k}z)\right]$$

これを積分して

$$\begin{aligned}
B_y(z,t) &= \int i\tilde{k}E_0\exp\left[i(\omega t-\tilde{k}z)\right]dt = \frac{i\tilde{k}}{i\omega}E_0\exp\left[i(\omega t-\tilde{k}z)\right]+C \\
&= \frac{\tilde{k}}{\omega}E_0\exp\left[i(\omega t-\tilde{k}z)\right] \qquad \text{但し } C=0 \text{ とした} \qquad (12) \\
&= \frac{\tilde{k}}{\omega}E_x(z,t)
\end{aligned}$$

(g) (f) の解、式 (12) より $B_y(z,t)=\frac{\tilde{k}}{\omega}E_x(z,t)$、これを $U_m=\frac{1}{2\mu}\left|B_y(z,t)\right|^2$ に代入して

$$U_m = \frac{1}{2\mu}\frac{\left|\tilde{k}\right|^2}{\omega^2}\left|E_x(z,t)\right|^2 \qquad (13)$$

となる。従って

$$\begin{aligned}
\frac{U_e}{U_m} &= \frac{\varepsilon\left|E_x(z,t)\right|^2}{2}\cdot\frac{2\mu\omega^2}{\left|\tilde{k}\right|^2\left|E_x(z,t)\right|^2} = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{\left|\tilde{k}\right|} = \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{k^2+k'^2} \\
&= \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{\left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2}\right)\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right\}+\left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2}\right)\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right\}} \\
&= \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{\left(\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{2}\right)}\frac{1}{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right\}+\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right\}} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}} = \left[1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (14)
\end{aligned}$$

(h) 問に与えられた ε、σ、ω を式 (14) に適応する。$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$ であることを考慮にいれて、$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}(Fm^{-1})$、$\mu_0=4\pi\times10^{-7}(Hm^{-1})$ を用いて、

$$\left.\frac{U_e}{U_m}\right|_{\text{銅 }50Hz} = \left[1+\left(\frac{5.8\times10^7(\Omega^{-1}m^{-1})}{8.85\times10^{-12}(Fm^{-1})\times2\pi\times50(s^{-1})}\right)^2\right]^{-1/2} = [1+4.35\times10^{16}]^{-1/2} = 4.79\times10^{-17}$$

$$\left.\frac{U_e}{U_m}\right|_{\text{ガラス }50Hz} = \left[1+\left(\frac{1\times10^{-15}(\Omega^{-1}m^{-1})}{5\times8.85\times10^{-12}(Fm^{-1})\times2\pi\times50(s^{-1})}\right)^2\right]^{-1/2} = [1+5.18\times10^{-15}]^{-1/2} = 1.0$$

これは比なので、次元はない。

(i) 表皮深さ l は $l=\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ である。

(j) $l=\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ なので、($\mu=\mu_0$とすると)

$$\begin{aligned} l_{Cu} &= \sqrt{\frac{2}{4\pi\times10^{-7}[Hm^{-1}]\times59.6\times10^{6}[m^{-1}\Omega^{-1}]\times2\pi\times10^{10}[s^{-1}]}}=\sqrt{\frac{2}{4.705\times10^{3-7+6+10}}}=6.5\times10^{-7}[m] \\ l_{glass} &= \sqrt{\frac{2}{78.95\times10^{3}\times1.0\times10^{-11}}}=\sqrt{0.0253\times10^{8}}=1.59\times10^{3}[m] \end{aligned}$$

３. 誘電体の屈折の法則を以下に答えて導く。

(a) 誘電率 ε、透磁率 μ の誘電体中の光の速さ v はいくらになるか、また絶対屈折率 n はいくらか。

(b) 誘電率 ε_1、透磁率 μ_1 の誘電体１と誘電率 ε_2、誘電率 μ_2 の誘電体２が平面で接している。それぞれの絶対屈折率を n_1、n_2 とするとき、電磁波（平面波）が１から２へ斜めに入射したとき、入射波、屈折波の進行方向と境界面の法線とのなす角をそれぞれ θ_1、θ_2 とすると、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

となることを示せ。（いきなりの解答不可、きちんと解説のある解答をすること）

解答

(a) 速度 v は $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (10.44)

$n=\frac{C}{v}=C\sqrt{\varepsilon\mu}$ ただし C は真空中の光速。

(b) 図２の様に電磁波の波面が誘電体１、２に入っていくとする。領域１、領域２では波長 λ_1、λ_2、波の速度 v_1、v_2 は異なるが、角振動数 ω_1、ω_2 は同じなので $\omega_1=\omega_2=\omega$ とすると、波の速さの定義 $v=\lambda\nu=\lambda\omega/2\pi$ より $\lambda=\frac{2\pi}{\omega}v$

波面 AB は１周期のうちに誘電体に入っていくので、

$$\begin{aligned} BB' &= \lambda_1=\frac{2\pi v_1}{\omega},\ \ AA'=\lambda_2\frac{2\pi v_2}{\omega} \\ BB' &= AB'\sin\theta_1,\ \ AA'=AB'\sin\theta_2 \\ \tfrac{BB'}{AA'} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2} \end{aligned}$$

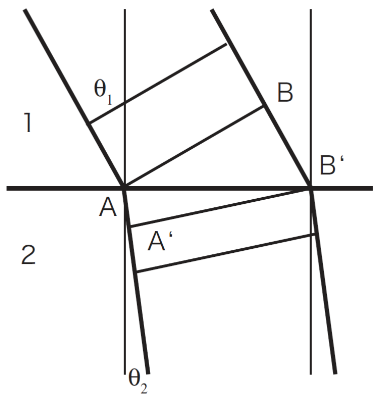

図 1: **誘電体間に伝わる平面波**

ところで、光速と屈折率の間には

$$v_1=\frac{C}{n_1},\ \ v_2=\frac{C}{n_2}$$

なので、

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1}$$

となる。

４. 平面電磁波（振幅 $\mathbf{E}$、$\mathbf{H}$）が誘電率 ε_1、透磁率 μ_1 の誘電体から、誘電率 ε_2、透磁率 μ_2 である誘電体に境界面に垂直に入射したとき、次の問に答えよ。（入射波と反射波の関係は図２を参照）

(a) 電場、磁場の境界条件はどのようになるか。

(b) 平面波の電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{H}$ の大きさの比は誘電率、透磁率で表すとどのようになるか。

(c) エネルギー流（ポインティングベクトル）$\mathbf{S}$ の定義を書け。さらにそれを誘電率 ε、透磁率 μ の物質中の電場 $\mathbf{E}$ で表すとどのようになるか。

(d) 反射波と透過波の電場の振幅を $\mathbf{E}$ で表せ、また反射波と透過波の磁場を $\mathbf{E_1}$、$\mathbf{E_2}$ で表せ。

(e) 反射率 r、透過率 t を求めよ。（反射率、透過率の定義はそれぞれ、反射波のエネルギー流／入射波のエネルギー流、透過波のエネルギー流／入射波のエネルギー流である。）

解答

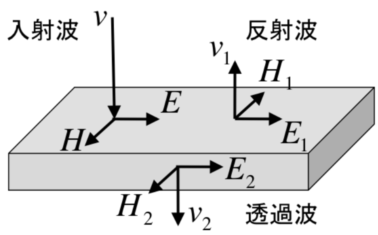

図 2: **物質に入射する電磁波、反射波、透過波**

(a) 図 2 の様に入射電磁波の磁場を x 方向、電場を y 方向にとると、透過電磁波の磁場と電場は同じ様に進むであろう。一方、反射波の進行方向は逆になる。これに、電場、磁場の境界条件は、面に垂直な方向なので、

$$E + E_1 = E_2,\ \ H - H_1 = H_2 \tag{15}$$

(b) 前問のものは導体に対応していたので少し違うが、マクスウェル方程式を解くと

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y,\ \ H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x$$

となるので、大きさの比は

$$\frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tag{16}$$

となる。

(c) ポインティングベクトルの定義は

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= |\mathbf{E}\times\mathbf{H}|, \quad \text{（教科書 } p263\text{）}\ \mathbf{E} \text{ と } \mathbf{H} \text{ は直交しているとして} \\ &= E \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2 \end{aligned} \tag{17}$$

(d) (c) より入射、透過、反射波の磁場は

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E,\ \ H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_1,\ \ H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_2 \tag{18}$$

これより式 (15) の H の関係式は

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_2 \tag{19}$$

式 (19) と式 (15) の E の式より

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E - E_1) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_2, \qquad \therefore (E - E_1) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}E_2 \tag{20}$$

式 (15) と式 (20) から

$$\begin{aligned} 2E &= \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\right)E_2, \\ \therefore E_2 &= \frac{2E}{\left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\right)} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} \quad \underline{\text{透過波}} \\ E_1 &= E_2 - E = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} - E = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}E \quad \underline{\text{反射波}} \end{aligned}$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_1 \quad \underline{\text{反射波}}, \qquad H_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_2 \quad \underline{\text{透過波}}$$

(e) エネルギー流は $S = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2$ なので、

$$
\begin{aligned}
\text{反射率：} \quad r &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_1^2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E^2} = \left(\frac{E_1}{E}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}\right)^2 \\
\text{透過率：} \quad t &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_2^2}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E^2} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}\left(\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}\right)^2 = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}
\end{aligned}
$$